Mat 4

Literatura: Mizori - Oblak (3. del)

Ivan Vidav - Višja matematika 2, 3

Mn. v $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R}\}$$

Razdalja med tč.

$x = (x_1, \dots, x_n)$ $\qquad d(x,y) = |x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$

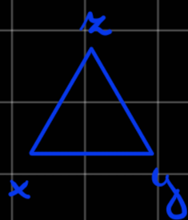
$y = (y_1, \dots, y_n)$

Lastnosti razdalje:

i) $|x-y| = |y-x|$

ii) $|x-y| \geq 0$ in $|x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$

iii) $\triangle$ neenakost $|x-y| \leq |x-z| + |y-z|$



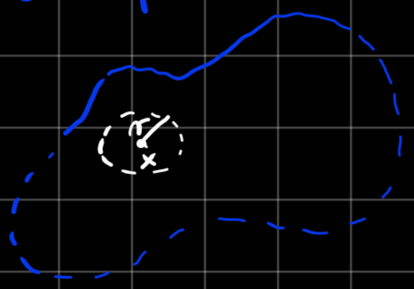
2 Odprte krogle v $\mathbb{R}^n$

$x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$

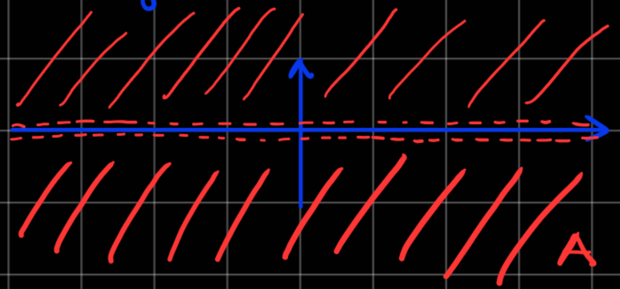
$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ |x - x_0| < r\}$$

⑤ Odprta množica v $\mathbb{R}^n$

Mn $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je odprta, č $\forall x \in U \ \exists r > 0$, da je $B(x,r) \subseteq U$



1) Ali je $A = \mathbb{R}^2 - (\mathbb{R} \times \{0\}) \subseteq \mathbb{R}^2$ odprta mn. v $\mathbb{R}^2$?



$(x,y) \in A \Rightarrow \ ? \ r > 0$, da so $B((x,y),r) \subseteq A$.

$\Rightarrow r(x,y) = |y|$

Če je $(x,y) \in A$, ali je tudi $B((x,y),|y|) \subseteq A$?

Naj bo $(x',y') \in B((x,y),|y|)$. Ali je $(x',y') \in A$?

Protislovje: Ali je lahko $(x',0) \in B((x,y),|y|)$?

$$d((x',0),(x,y)) = \sqrt{(x'-x)^2 + y^2} \geq \sqrt{y^2} \geq |y|$$

$\Rightarrow (x',0) \notin B((x,y),|y|)$

4 Zaprte mn. v $\mathbb{R}^n$

Mn. $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ je zaprta $\Leftrightarrow$ Z^c odprta v $\mathbb{R}^n$

Velja: 1) $\mathbb{R}^n$ je odprta in zaprta

2) $\emptyset$ je zaprta mn.

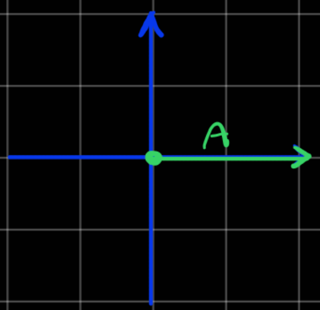
3) $\emptyset$ je tudi odprta mn. v $\mathbb{R}^n$

Veliko podmnožic v $\mathbb{R}^n$ ni niti odprtih ali zaprtih.

4) Poljubna unija odprtih množic je odprta

5) Končni presek odprtih množic je odprt

2) Ali je $A = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0\}$ zaprta v $\mathbb{R}^2$?



glej prejšnjo nalogo

1) $(x,y) \in A^c,\ y \neq 0 \Rightarrow B((x,y), |y|) \subseteq A$

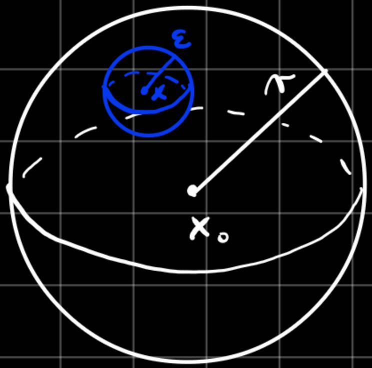
2) $(x,0) \in A^c,\ y = 0 \Rightarrow B((x,y), |x|) \subseteq A^c$

$\Rightarrow A^c$ odprta, A je zaprta

Op.: $x_0 \in \mathbb{R}^n,\ r > 0$

$B(x_0, r)$ ... odprta krogla

Ali je $B(x_0, r)$ odprta mn. v $\mathbb{R}^n$?



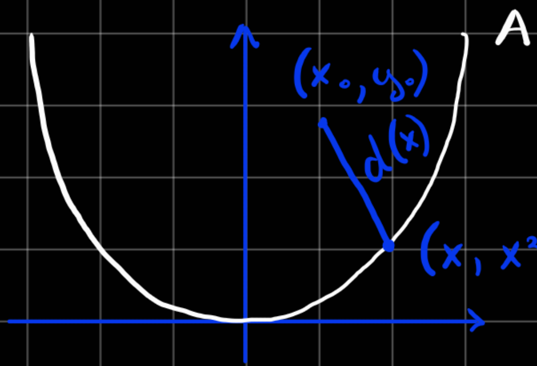
Naj bo $B(x_0, r)$. Ali $\exists\, \varepsilon > 0$, da je $B(x, \varepsilon) \subseteq B(x_0, r)$

$$\varepsilon = r - |x - x_0| = r - d$$

Naj bo $y \in B(x, r-d) \Rightarrow y \in B(x_0, r)$

$$|y - x_0| = |y - x + x - x_0| \leq |y - x| + |x - x_0| < r - d + d = r$$

3) Ali je $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = x^2\}$ zaprta v mn. $\mathbb{R}^2$?



$$d(x) = \sqrt{(x - x_0) + (x^2 - y_0)^2}$$

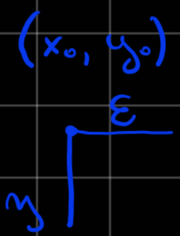
Iščemo minimum (radij med (x_0, y_0) in najbližjo tč. mn. A

Odvajamo samo znotraj korena

$$d'(x) = 2(x - x_0) + 2(x^2 - y_0)2x = 0$$

$$4x^3 - 4xy_0 + 2x - 2x_0 = 0$$

Iščemo ničle polinoma 3. stopnje, kar oteži zadevo.
Prezakompliciran pristop.



$$f(x,y) = y - x^2$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; f(x,y) = 0\}$$

$$A^c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 , f(x,y) \neq 0\}$$

$$f(x_0, y_0) = c > 0$$

Poskusimo oceniti možne premike ε, η, za katere

$$f(x_0 + \varepsilon, y_0 + \eta) > 0$$

$$f(x_0 + \varepsilon, y_0 + \eta) = y_0 + \eta - (x_0 + \varepsilon)^2$$

$$= c + (\eta - 2x_0 \varepsilon - \varepsilon^2) > 0$$

$$|\eta - 2x_0 \varepsilon - \varepsilon^2| < c$$

$$|\eta - 2x_0 \varepsilon + \varepsilon^2| \leq |\eta| + 2|x_0||\varepsilon| + |\varepsilon^2| \underset{\uparrow}{\leq} |\varepsilon| + 2|x_0||\varepsilon| + |\varepsilon|$$

$$|\eta| \leq |\varepsilon| \leq 1$$

$$= |\varepsilon| (2 + 2|x_0|) < c$$

$$\Rightarrow (x_0, y_0) \in A^c \Rightarrow B\left((x_0, y_0), \frac{|f(x_0, y_0)|}{2(1+|x_0|)}\right) \subseteq A^c$$

A^c odprta $\Rightarrow$ A zaprta

Preslikave $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Preslikava $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je zvezna v $x_0 \in \mathbb{R}^n$, če $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$, da $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $|x - x_0| < \delta$ velja, da je $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Velja: Naj bo $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zvezna.

1) $V \subseteq \mathbb{R}^m$ odprta mn. $\Rightarrow f^{-1}(V)$ je odprta
2) $Z \subseteq \mathbb{R}^m$ zaprta $\Rightarrow f^{-1}(Z)$ je zaprta

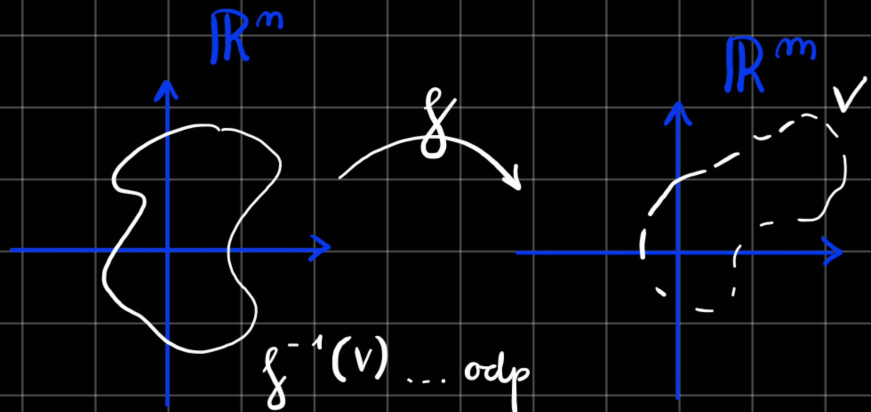
Praktična naloga:

zvezna preslikava $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = y - x^2$

$$A = \{(x, y) ; f(x, y) = 0\} = f^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(0)$$

$\{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ // zaprta v $\mathbb{R}^2$

f je zvezna $\Rightarrow f^{-1}(0)$ je zaprta v $\mathbb{R}^2$



Primeri:

1) $\mathbb{R}$ (a, b) ... odprta, $[a, b]$ ... zaprta, $[a, b)$ niti odprta niti zaprta

Kompaktne množice

$K \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktna, če je omejena in zaprta
$\hookrightarrow (\exists R \quad K \subseteq B(0, R))$

$\mathbb{R}: [a, b]$ je komp. mn.

$\mathbb{R}^n: [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ je komp.

~~3) K komp. v $\mathbb{R}^n \Rightarrow f^{-1}(K)$ je komp.~~

Zaporedja v $\mathbb{R}^n$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \; a_n \in \mathbb{R}^n$

Tč. $A \in \mathbb{R}^n$ je limita zaporedja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (oznaka $A = \lim_{n \to \infty} (a_n)$) če $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}$, da $\forall n \geq n_0$ velja $|a_n - A| < \varepsilon$

(oz. drugače

$$A = \lim_{n \to \infty} (a_n) \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} |a_n - A| = 0$$

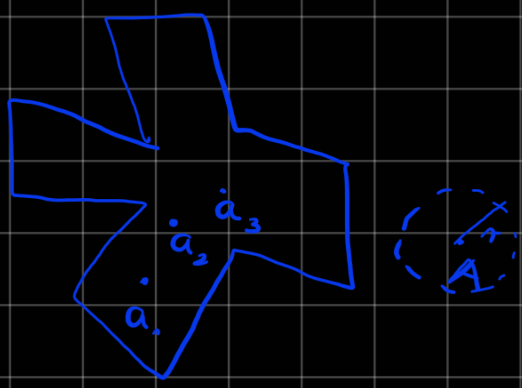
4) Naj bo $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ zaprta mn. in $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedja v Z (vsi členi $a_n \in Z$)
Naj bo $A = \lim_{n \to \infty} (a_n)$. Ali je $A \in Z$?

// ali mora biti limita znotraj množice členov zaporedja

Zdi se, da $A \in Z$.

Protislovje: $A \notin Z$

Vemo Z^c odprta $\Rightarrow$ Z zaprta.



$\exists r > 0$, da je $B(a, r) \subseteq Z^c$

$|a_n - A| \geq r$

$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - A| \neq 0$

$A \neq \lim\limits_{n\to\infty} (a_n)$